УДК 528.2/.3

А. ФЕДОРЧУК

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна, ел. пошта: alina.v.fedorchuk@lpnu.ua

АНАЛІЗ ПОХИБОК ЕЛІПСОЇДНИХ ВИСОТ НА ОСНОВІ РЕЗУЛЬТАТІВ GNSS-НІВЕЛЮВАННЯ

Дослідження впливу похибок на результати вимірювань завжди є актуальним завданням. Аналіз таких величин дає можливість оцінити характер зміни та величину впливу похибок для подальшого врахування або компенсування, або зведення до мінімуму. В цій роботі розглянуто похибки визначення еліпсоїдних висот із GNSS-спостережень. У визначенні еліпсоїдної висоти цим методом можна досягти точності 1–2 см у статичному режимі (Static) та 2–4 см у режимі реального часу (RTK). Отже, точність вибраного режиму спостережень вказуватиме на початкові межі впливу похибок еліпсоїдних висот, а чинники, що виникають безпосередньо під час спостережень та під час опрацювання даних, визначатимуть, в яких межах змінюватимуться ці похибки щодо початкових меж. **Мета** цієї роботи полягає у проведенні аналізу похибок еліпсоїдних висот на основі результатів GNSS-нівелювання, отриманих у режимах статичності та RTK. **Методика.** Для дослідження використано дані GNSS-нівелювання на 17 пунктах (стінні та ґрунтові репери) ходів нівелювання I–II класів, які розташовані в радіусі 15 км від перманентної станції SULP Національного університету “Львівська політехніка”. Спостереження виконано в режимі статичності (4-годинні) та RTK (8–10 вимірювань). Пункти поділено на три категорії (5–6 пунктів): 1) статика на стінних реперах; 2) режим реального часу на стінних реперах; 3) статичний режим на ґрунтових реперах. Комбінуванням режимів спостережень та заданих категорій утворено чотири GNSS-мережі, що містять 11, 11, 12 та 17 пунктів. **Результати.** Для кожної категорії визначено у процентах, у яких межах змінюються похибки еліпсоїдних висот у статичному режимі спостережень та режимі реального часу, із застосуванням методу GNSS-нівелювання. На основі отриманої інформації встановлено, що для першого випадку похибки еліпсоїдних висот у середньому змінюються у межах $\pm 43\%$, для другого – $\pm 36\%$, а для третього – $\pm 14\%$. Аналіз статистичних характеристик для кожної категорії свідчить про те, що стандартне відхилення даних статичного режиму становить 2 % та 19 %, а режиму RTK – 12 % відповідно. **Наукова новизна та практична значущість.** Характер зміни меж похибок визначення еліпсоїдних висот дає уявлення про те, якої точності слід очікувати, виконуючи GNSS-нівелювання залежно від режиму спостережень. Такі дані відіграють важливу роль у вирішенні науково-прикладних завдань методом GNSS-нівелювання, таких як побудова нових нівелірних мереж або моніторинг пунктів висот вже наявних мереж.

Ключові слова: похибки; GNSS; нівелювання; висоти; геоїд.

Вступ

Сьогодні для розв’язання різноманітних геодезичних задач здебільшого використовують методи GNSS-спостережень. Стосовно систем глобального позиціонування постійно ведуться наукові дослідження для підвищення точності супутникових даних. На нинішньому етапі розвитку цих систем точність визначення координат може сягати кілька міліметрів (уточнені координати GNSS-станцій) [Савчук С. Г., 2015], однак ситуація із висотною складовою залишається не такою однозначною. Пов’язано це з тим, що результатами GNSS-спостережень є геоцентричні просторові координати X, Y, Z а від них вже переходять до еліпсоїдних координат B, L та еліпсоїдної висоти H .

Як відомо, всі GNSS-спостереження супроводжуються низкою похибок. На точність отриманих вимірів (зокрема на визначення еліпсоїдної висоти) цими методами першочергово впливають такі похибки, як [Hofmann-Wellenhof B. et al, 2008; Karaim M. et al, 2018]:

- похибки ефемерид супутника;
- похибки годинників супутника і приймача;
- похибки, спричинені іоносферою та тропосферою;
- погіршення точності (DOP);
- багатопрохідність (відбиття) сигналу;
- похибки GPS-приймача.

Певний вплив таких похибок можна усунути чи мінімізувати під час проведення супутникових спостережень, а деякі з них можна змоделювати за характером зміни їх у часі та просторі.

Також існують похибки, які коригують під час аналізу GNSS-спостережень у програмному пакеті, а саме:

- правильний вибір типу антени;
- введення метеорологічних параметрів;
- вибір моделі тропосфери/іоносфери;
- клас точних ефемерид.

Отже, після опрацювання результатів супутникових спостережень за допомогою професійного програмного забезпечення можна отримати еліпсоїдні координати та висоту. Проте ці дані користувач одержує з певною похибкою. Зазвичай похибка визначення координат сягає сантиметрової або міліметрової точності, а похибка еліпсоїдних висот становить кілька сантиметрів.

На точність визначення еліпсоїдних висот також впливають такі фактори, як: режим спостережень; зміщення центра мас Землі із центром загальноземного еліпсоїда; сумісне, комбіноване чи окреме опрацювання даних від глобальних супутникових систем позиціонування; можливості програмного забезпечення, в якому опрацьовано ці дані тощо. Отже, важливо аналізувати всі чинники, що впливають на точність визначення еліпсоїдних висот методом GNSS-нівелювання.

Від еліпсоїдних висот можна перейти до таких висот, як ортометричні чи нормальні. Цей перехід здійснюють, виконавши прості математичні дії:

$$H^O = H - N, \quad (1)$$

$$H^g = H - z, \quad (2)$$

де H^O – ортометрична висота; H – еліпсоїдна висота; N – висота геоїда над еліпсоїдом; H^g – нормальна висота; z – висота квазігеоїда над еліпсоїдом. Однак потрібно дати певне роз'яснення щодо трактування цих висот. У такому разі ортометрична і нормальна висоти визначені за еліпсоїдною висотою, що має суто геометричний зміст, та висотою геоїда чи квазігеоїда, які є математично змодельованими фізичними величинами. Такий метод визначення ортометричних та нормальних висот називають GNSS-нівелюванням.

Висоти, отримані за формулами (1)–(2), будуть також визначені із певними похибками, що являють собою загальні похибки визначення ортометричних (M_{H^O}) чи нормальних (M_{H^g}) висот методу GNSS-нівелювання. Величину таких похибок можна оцінити лише на пунктах нівелірних мереж високих класів точності. Характер зміни загальних похибок залежатиме від похибки визначення еліпсоїдної висоти (m_H) та похибки моделі геоїда (m_N) чи квазігеоїда (m_z) відповідно. З

урахуванням цих чинників формули загальної похибки набудуть такого вигляду:

$$M_{H^O}^2 = m_H^2 + m_N^2, \quad (3)$$

$$M_{H^g}^2 = m_H^2 + m_z^2. \quad (4)$$

Здебільшого похибка будь-якої математичної моделі геоїда загальноземного чи регіонального рівня (а квазігеоїда – регіонального чи локального) більша від похибки еліпсоїдної висоти. Саме тому, визначаючи ортометричні або нормальні висоти методом GNSS-нівелювання, похибкою (m_H) переважно нехтують. Якщо припустити, що похибка моделі геоїда чи квазігеоїда буде на рівні точності похибки еліпсоїдних висот, то вплив останньої не можна ігнорувати. Саме цей аспект розглянуто в статті.

Аналіз останніх досліджень

Сьогодні визначення висот методами GNSS-спостережень із високою точністю є пріоритетним у багатьох сферах геодезії, картографії та землеустрою. Найбільше уваги спрямовано на наукові завдання та на підтримку геодезичних мереж державного призначення.

В Україні понад 40 років використовують Балтійську систему нормальних висот 1977 р. Проектом постанови Кабінету Міністрів України в 2019 р. передбачено перехід України на Амстердамську систему нормальних висот [Держгеокадастр, 2019; НДІГК, 2019]. Сьогодні тривають заходи щодо створення та впровадження нової системи висот, яка має бути реалізована до 2023 р.

Практика застосування методу GNSS-нівелювання для визначення нормальних (чи ортометричних) висот вказує на те, що похибку еліпсоїдних висот до уваги не беруть. Хоча фактично така похибка є наслідком впливу всіх похибок, що супроводжують GNSS-спостереження. Наприклад, похибку іоносфери першого порядку можна вилучити під час спостережень, використавши двочастотний GPS-приймач. Якщо ж ідеться про врахування похибок іоносфери другого і третього порядків, то потрібно виконати додаткові обчислення за певними формулами [Mainul Hoque M. and Jakowski N., 2008]. Фактично дві останні похибки не вилучають під час подальшого опрацювання (урівноваження мережі) в стандартних програмних пакетах. Це дає підстави для висновку, що теоретично вони входять у кінцеву похибку визначення еліпсоїдних висот.

Тобто така ситуація притаманна й іншим похибкам, що виникають під час GNSS-спостережень, навіть після врахування їх на рівні супутникового обладнання (метод RTK) і за допомогою інженерних програмних пакетів (статичний метод). Досягти міліметрового рівня точності можна, лише виконавши додаткове

опрацювання даних за допомогою наукових програмних пакетів на основі багаторічних даних супутникових вимірювань на постійно діючих референціальних станціях.

У багатьох країнах світу роблять різноманітні спроби узгодити між собою різні типи висот: еліпсоїдні висоти – модельні висоти геоїда (чи квазігеоїда) – ортометричні висоти (чи нормальні). Суть узгодження полягає у тому, щоб забезпечити взаємоперехід між цими висотами із точністю геометричного нівелювання вищих класів.

У Латвії для узгодження Балтійської системи висот із супутниковими даними та локальною моделлю геоїда скористались правилом щорічних GNSS-спостережень на однотипних пунктах [Celms A., 2016]. Трирічні дані різняться на рівні 1–4 см, а середня точність визначення еліпсоїдних висот у статичному режимі становить 2 см.

Канада оприлюднила нову систему висот CGVD2013, яка реалізована канадською гравітаційною геоїдною моделлю CGG2013a та сумісна із GNSS-вимірами. Згідно із опублікованими даними [Natural Resources Canada, 2019], реалізація нової Канадської системи відліку висот коригує спотворення у попередній системі висот (CGVD28) на національному рівні від (–65 см) до (+55 см). Усереднена різниця між ортометричними висотами, визначеними за даними супутникового нівелювання з урахуванням нового геоїда CGG2013a та висотами з класичного нівелювання, дорівнює (–0,157 м) зі стандартним відхиленням (0,131 м). Таку невідповідність між даними оцінено формулою:

$$h - H - N = e, \quad (5)$$

де h – це еліпсоїдні висоти з GNSS; H – ортометричні висоти з нівелювання; N – висоти геоїда з моделі; величина e – поправка за перехід до ортометричної висоти.

Різні науковці проводили дослідження щодо прив'язки глобальних моделей геоїда найвищого ступеня/порядку до національних систем висот методом GNSS-нівелювання. У роботі [Wu Q. et al., 2015] розглянуто сумісність локального геоїда CGCS2000 та глобального EGM2008. Результати показали, що від EGM2008 до CGCS2000 можна здійснити перехід на рівні 0,023–0,111 м.

Спробу коригування висот геоїда моделі EGM2008 на основі локальної висотної мережі описано в статті [Fanos A. et al., 2018]. Отримано як додатний, так і від'ємний показники в межах від (–0,18 м) до (+0,05 м). Вимірювання охоплювали територію радіусом приблизно 50 км. Автори цього дослідження дійшли висновку, що на півночі досліджуваної території модель EGM2008 не можна використовувати через великі розбіжності.

Гравітаційна модель Землі глобального масштабу – геоїд EGM08 з'явилась ще в 2008 р. [Pavlis N. K. et al., 2012]. Після різних тестувань було встановлено, що точність цієї моделі в деяких регіонах планети може сягати 5–10 см. Такі результати свідчать, що ця модель можна використовувати як регіональну. Утім, навіть у такому випадку на заявлену точність потрібно зважати, оскільки вона не дає змоги виконувати високоточні роботи.

У публікаціях [Barnes D. et al., 2017; Sinem Ince E. et al., 2019] заявлено про те, що випуск покращеної глобальної моделі гравітаційного поля EGM2020 заплановано протягом 2020 р. Ця модель має бути узгоджена із загальноземним еліпсоїдом з очікуваною просторовою роздільною здатністю ≈ 9 км. Оскільки більшість наукових напрацювань спираються все ж на модель 2008 р., то поки що вона залишається в центрі уваги геодезичних досліджень.

Сьогодні існують й інші моделі гравітаційного поля з такою самою середньою точністю. Хоча, як показує практика, узгодженість будь-якої моделі геоїда з GNSS-даними та системою ортометричних чи нормальних висот – це індивідуальний випадок для конкретного регіону. Для прикладу, ефективність даних на основі глобального геоїда GOCE аналізували на міжконтинентальному рівні [Gruber T., 2012] між Сполученими Штатами Америки, Австрією та Німеччиною. Результати показали усереднену різницю 5 см, що на 10 см менше, ніж за результатами EGM2008.

Отже, проблема визначення висот за даними глобальних навігаційних систем та моделями геоїда або квазігеоїда залишається спірною і фактично зводиться до точності самих моделей. Саме тому країни, у яких модель геоїда справді узгоджується із реальним геоїдом, з високою точністю здійснюють модернізацію своїх систем висот. Інші ж продовжують ретельно вивчати властивості похибки переходу між системами висот для втілення якнайточнішого узгодження.

Мета

Мета цієї роботи – виконати аналіз похибок еліпсоїдних висот на основі результатів GNSS-нівелювання, отриманих у режимах статики та RTK.

Методика

У роботі використано дані каталогів висот пунктів нівелювання I–II класів та дані супутникових спостережень на цих пунктах. Локацією досліджень є місто Львів та прилеглі території. Спостереження виконано у двох режимах: у статичному (Static) та в режимі реального часу (RTK). Поправки для RTK-вимірів отримано від перманентної станції SULP із найдовшим базисом ~ 10 км. Дані статичних супутникових вимірювань опрацьовано

програмним пакетом TGO (TersusGeomaticsOffice), у результаті отримано врівноважені значення координат (B, L) та еліпсоїдної висоти (H). За широтою та довготою кожного пункту визначено висоти геоїда (N) із моделі EGM2008. Загалом ураховано 17 пунктів високоточної нівелірної мережі, з яких 12 стінні реperi, а 5 – ґрунтові.

На основі вищезазначених даних здійснено перехід до системи нормальних висот за такими формулами:

- для ґрунтових реперів

$$H_N^g = H - N ; \quad (6)$$

- для стінних реперів

$$H_N^g = H - N + h . \quad (7)$$

У формулі (7) наявне перевищення h , оскільки для стінних реперів здійснюють передавання висоти із тимчасового пункту спостережень на репер методом геометричного нівелювання.

Для повноти досліджень потрібно знати вимірювану висоту квазігеоїда ($Z_{\text{вим.}}$) над еліпсоїдом для всіх реперів. Це дасть можливість оцінити загальну похибку визначення нормальних висот із GNSS-нівелювання щодо нормальних висот, визначених високоточним нівелюванням. Вимірювану висоту квазігеоїда можна знайти як різницю між еліпсоїдною висотою та нормальною висотою (H_K^y) із високоточного геометричного нівелювання за таким виразом:

$$Z_{\text{вим.}} = H - H_K^g . \quad (8)$$

Тоді загальну похибку можна розрахувати на основі таких формул:

$$H_K^g - (H - N) = D \quad (9)$$

або

$$N - Z_{\text{вим.}} = D . \quad (10)$$

Похибку D називають загальною, оскільки у ній не виокремлено похибку нормальних висот високоточного геометричного нівелювання (m_{H_K}), еліпсоїдних висот (m_H) та моделі геоїда (m_N). Звідси випливає, що загальну похибку на ґрунтових реперах можна подати як суму похибок:

$$D^2 = m_{H_K^g}^2 + m_H^2 + m_N^2 . \quad (11)$$

Відповідно для стінних реперів у формулу (11) додається похибка визначення перевищення (m_h) за рахунок передавання висоти із тимчасового пункту на репер. Тоді остаточна формула загальної похибки для стінних реперів матиме вигляд:

$$D^2 = m_{H_K^g}^2 + m_H^2 + m_N^2 + m_h^2 \quad (12)$$

У цьому дослідженні похибка нормальної висоти з високоточного геометричного нівелювання прирівняна

до нуля ($m_{H_K^g} = 0$). Пов'язано це з тим, що точність та стабільність нормальних висот наявних пунктів нівелювання I–II класів можна підтвердити лише повторним високоточним нівелюванням.

Як ми вже зазначали, точність визначення еліпсоїдних висот у статичному режимі становить 1–2 см, а в режимі RTK майже вдвічі більше. У цій роботі за похибку еліпсоїдних висот прийнято стандартне відхилення масиву даних супутникових спостережень на 17 пунктах висот I–II класів нівелювання. Цю величину розраховано для всіх пунктів разом та для окремих груп пунктів відповідно до класу точності утворених GNSS-мереж. Для стінних реперів прийнято похибку 1 мм як похибку методу геометричного нівелювання у разі передавання висоти із тимчасового пункту спостережень на репер.

Якщо зазначені вище величини подати щодо загальної похибки, то отриманий результат відображатиме можливість впливу величин m_H та m_h на загальну похибку.

Результати

Після визначення похибок на пунктах висот їх аналізують. Згідно з попередніми дослідженнями [Федорчук А., 2018], середнє значення загальної похибки для GNSS-мережі з 16 пунктів нормальних висот становить 6 см, $\max \approx 9$ см та $\min \approx 3$ см, зі стандартним відхиленням 1,8 см. На основі цих даних встановлено деяку систематику зміни загальної похибки моделі глобального геоїда EGM2008 на територію радіусом ~ 15 км від контрольної станції SULP.

Похибка еліпсоїдних висот та визначення перевищень на реперах змінюється у певних межах на кожному пункті індивідуально. За майже однакових умов спостережень (віддаленість від контрольної станції, тип приймача, режим спостережень тощо) можна проаналізувати, в яких межах коливатимуться ці зміни.

У цій роботі похибки (m_H) та (m_h) подано у процентах щодо загальної похибки визначення нормальних висот методом GNSS-нівелювання. Дані спостережень було поділено за трьома категоріями через зіставлення: “вид знака – режим спостережень”. Перша та друга категорії – це спостереження на стінних реперах у режимі статички (Static) та RTK (режим реального часу); а третя – статика на ґрунтових реперах.

Для наочного аналізу даних побудовано гістограми впливу похибок на пунктах висот залежно від типу репера та режиму спостережень. Процентний вплив похибок окремо на кожному репері ілюструють рис. 1–3. Горизонтальна вісь відображає значення загальних похибок визначення нормальних висот методом GNSS-нівелювання.

Порівнюючи рис. 1–3, бачимо, що похибка еліпсоїдної висоти (m_H) може змінюватися у таких межах:

- Static/Ст. рп. $\pm 27\% \leftrightarrow \pm 72\%$;
- RTK/Ст. рп. $\pm 23\% \leftrightarrow \pm 53\%$;
- Static/Гр. рп. $\pm 11\% \leftrightarrow \pm 16\%$.

У разі передавання висоти з тимчасового пункту на репер похибка за перевищення (m_h) може становити від $\pm 1,1\%$ до $\pm 3,5\%$. Це означає, що ця похибка сягає кількох міліметрів, отже, нею можна знехтувати.

Рис. 1. Похибки на стінних реперах (статичний режим)

Fig. 1. Errors on wall benchmarks (Static mode)

Рис. 2. Похибки на стінних реперах у режимі RTK

Fig. 2. Errors on wall benchmarks in RTK mode

Рис. 3. Похибки на ґрунтових реперах у режимі статика

Fig. 3. Errors on soil benchmarks in Static mode

Як відомо, перманентні та референсні станції виконують спостереження безперервно, збираючи дані про своє місце розташування. Здійснюючи багаторічні спостереження на базі таких станцій, отримують уточнені еліпсоїдні координати та висоту. Оскільки всі GNSS-спостереження цього дослідження виконано відносно станції SULP Національного університету “Львівська політехніка”, то для станції також розраховано аналогічні похибки. Похибка визначення еліпсоїдної висоти GNSS-станції становить 6 %. Передавання нормальної висоти із репера на станцію здійснено методом тригонометричного нівелювання, а похибку передавання висоти оцінено на рівні $\pm 13\%$. На рис. 4 зображено вплив цих похибок щодо загальної похибки визначення нормальної висоти перманентної станції SULP.

Рис. 4. Вплив похибки еліпсоїдних висот та передавання висоти методом нівелювання на станції SULP

Fig. 4. Influence of ellipsoidal height error and height transfer by leveling method at SULP station

Фактично таке відношення можна вважати певним орієнтиром під час аналізу похибок визначення еліпсоїдних висот та висот моделі геоїда або ж визначення нормальних висот точок фізичної поверхні землі методом GNSS-нівелювання.

Таким самим способом досліджено похибки на кожному пункті. Наступний етап полягав у дослідженні характеру зміни похибок за категоріями “статика – стінний репер”, “режим реального часу – стінний репер” та “статика – ґрунтовий репер”.

За усередненими значеннями кожної категорії побудовано три діаграми впливу цих похибок, як показано на рис. 5, а–в. Похибка еліпсоїдної висоти в статичному режимі на ґрунтових реперах (див. рис. 5, в) змінюється в межах $\pm 14\%$, що приблизно дорівнюватиме 1 см. Приміром, якщо у випадку зі стінними реперами, застосовуючи режим статика (див. рис. 5, а), знехтувати похибкою передавання висоти, то усереднена похибка супутникових вимірів становитиме $\pm 43\%$ (або 2,9 см) від загальної похибки.

Рис. 5. Діаграма впливу похибок на реперах:
а – стінних у режимі спостережень Static;
б – стінних у режимі реального часу;
в – ґрунтових у статичному режимі

Fig. 5. Diagram of the influence of errors on:
a – wall benchmarks in the Static observation mode;
б – real-time wall benchmarks; в – soil benchmarks
in static mode

Різниця похибок еліпсоїдних висот $\approx 29\%$ між режимами спостережень на стінних і ґрунтових реперах не пов'язана із похибкою за перевищення ($\approx \pm 2\%$), а є наслідком впливу навколишніх умов на пункти. Ґрунтові реperi розташовані на окраїнах Львова (або на відкритій місцевості у місті), що уможлиблює доступ до максимально “відкритого неба”. Стінні реperi

розміщені в щільно забудованих районах міста із насиченим трафіком пішоходів та автотранспорту. Саме тому умови, в яких проводять спостереження, істотно впливають на точність визначення похибки еліпсоїдних висот.

У режимі реального часу похибка еліпсоїдної висоти сягатиме $\pm 35\text{--}37\%$, тобто буде меншою порівняно зі статикою (див. рис. 5, а, б). RTK-режим теж чутливий до випадкових чинників (кількість супутників, якість інтернет-з'єднання, багатошляховість тощо), проте висока точність поправок від мережі референсних станцій дає змогу отримати фіксовані розв'язки за кілька хвилин для 8–10 вимірів. Тому, якщо йдеться лише про еліпсоїдну висоту пункту, розташованого на забудованій місцевості, то іноді доцільніше використовувати режим RTK, а не статичний. Але, якщо визначати нормальну висоту у цьому режимі, то дані RTK-вимірювань можуть суттєво погіршувати точність таких висот.

На основі умовно утворених мереж GNSS-спостережень було розраховано статистичні характеристики для похибки визначення еліпсоїдної висоти. Графічну статистику відображено на рис. 6.

Рис. 6. Гістограма статистичних характеристик похибки еліпсоїдної висоти за трьома категоріями

Fig. 6. Histogram of statistical characteristics of ellipsoidal height error by three categories

Аналізуючи дані гістограми (рис. 6), бачимо, що логічно-послідовне очікування зниження точності вимірів у черговості: “Static/Гр. рп.” $\rightarrow$ “Static/Ст. рп.” $\rightarrow$ “RTK/Ст. рп.” не простежується. Стандартне відхилення похибки еліпсоїдних висот у статичному режимі становить 2 % та 19 %, а в режимі реального часу сягає 12 %.

Зрозуміло, що найстабільніші значення статистичних характеристик притаманні режиму статички. За результатами цього дослідження клас точності вимірювань статичним режимом на стінних реперах на 17 % нижчий, ніж на ґрунтових. Вимірювання на цих пунктах виконували однаковими приймачами, тому це

зниження точності зводиться до таких чинників, як навколишні умови та місцезнаходження пунктів (забудована територія міста).

Статистичні характеристики розраховано також для GNSS-мереж, які утворено комбінуванням категорій:

- а) 1–2 – $(Sc+R)$ – статичний режим (ст. рп.) з RTK (12 пунктів);
- б) 2–3 – $(R+Sr)$ – RTK та статичний режим (гр. рп.) (11 пунктів);
- в) 1–3 – $(Sc+Sr)$ – статичний режим (ст. рп.) і (гр. рп.) (11 пунктів);
- г) 1–2–3 – $(Sc+R+Sr)$ – всі три категорії разом (17 пунктів).

На рис. 7 наведено порівняльні графіки статистичних характеристик.

Рис. 7. Графік статистичних характеристик похибки еліпсоїдної висоти умовних GNSS-мереж

Fig. 7. Graph of statistical characteristics of ellipsoidal height error of conditional GNSS networks

Як бачимо з графіків, найбільші значення у категорій 1–2 та 1–2–3. У цьому випадку максимальні значення досягають ± 65 –75 %, мінімальні ± 20 –23 %, середні ± 35 –43 %, а стандартне відхилення 13–17 %. Також у цих категоріях спостерігається великий розмах значень, який становить 45 % та 52 %. Це свідчить про те, що в цих даних переважають максимальні та мінімальні значення, які погано взаємоузгоджуються.

Категорії 1–3 та 2–3 за значеннями близькі, тому різняться лише на 1–2 % та коливаються у таких межах: макс.= ± 51 –53 %, мін.= ± 19 –20 %, сер.= ± 28 –31 %, σ =10–11 %. Такі результати вказують на те, що похибки еліпсоїдних висот у разі комбінування умовних мереж добре сумісні між собою.

Тому на зменшення похибки визначення еліпсоїдної висоти можна вплинути у певний спосіб. Однак необхідно зазначити, що вона має певну межу точності. Навіть за “ідеальних” умов, з урахуванням усіх факторів, ця похибка буде оцінена стандартним відхиленням

на рівні 1–2 см (за порівняно невеликих базисів). Тому, визначаючи висоти методом GNSS-нівелювання, передусім важливо стежити за якістю проведення спостережень.

Висновки

У результаті дослідження проаналізовано похибки еліпсоїдних висот для режиму статичної та RTK, а також похибку передавання висот методом геометричного нівелювання. Похибки оцінено за трьома категоріями: статика, RTK на стінних реперах та статика на ґрунтових реперах.

Статистичні характеристики свідчать, що похибка визначення еліпсоїдної висоти дуже чутлива до багатьох чинників (ефект багатошляховості, “закритого неба”, відстань до контрольної станції тощо). Залежить вона також від вибраного режиму спостережень та може бути оцінена стандартним відхиленням у 2–19 %.

Аналіз стандартних відхилень похибок висотних складових на пунктах свідчить, що у разі передавання висоти з тимчасового пункту на репер похибкою визначення перевищення можна знехтувати.

Визначаючи висоти за даними GNSS-спостережень, у режимі статичної на ґрунтових реперах можна очікувати зміни похибки еліпсоїдних висот у межах ± 14 %. Комбінуючи супутникові вимірювання, на стінних і ґрунтових реперах у статичному режимі можна очікувати відхилень у значеннях похибок еліпсоїдних висот на рівні ± 28 –31 %.

Згідно з отриманими даними, режим реального часу доцільніше застосовувати для визначення еліпсоїдних висот на забудованих територіях, ніж режим статичної. Збільшення кількості пунктів спостережень, а також комбінування режимів спостережень дають можливість звести похибку визначення еліпсоїдних висот до мінімуму.

Література

- Barnes D., Holmes S., Factor J., Ingalls S., Presicci M., and Beale J. (2017). Geophysical Research Abstracts. EGU General Assembly 2017. Vol. 19, EGU2017-9587, 2017. *Approved for Public Release*, pp. 15–564.
- Celms A., Rusiņš J., Reķe I. (2016). Research of National geodetic network using GNSS metod. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, Вип. I (31), pp. 63–68.
- Fanos A., Tahir R., & Mahmood M. (2018). Calculating of adjusted geoid undulation based on EGM08 and mean sea level for different regions in Iraq. *MATEC Web of Conferences*. Vol. 162.
- Gruber T., Gerlach C. & Haagmans R. (2012). Intercontinental height datum connection with GOCE and GPS-

- levelling data. *Journal of Geodetic Science*, 2 (4), pp. 270–280.
- Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Mainul Hoque M. & Jakowski N. (2008). Estimate of higher order ionospheric errors in GNSS positioning. *Radio Science*, vol. 43, pp. 1–15.
- Pavlis N. K., Holmes S. A., & Factor J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008), *J. Geophys. Res.*, 117 p.
- Sinem Ince E., Barthelmes F. & Schuh H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. Published by Copernicus Publications – Earth Syst. Sci. Data, 11. pp. 647–674.
- Wu Q., Kang J., & Li H. (2015). GNSS Positioning by CORS and EGM2008 in Jilin Province, China. *Sensors – Open Access Journal*, 15, 30419–30428.
- Інтернет-ресурс Intech Open. Karaim M., Elsheikh M. and Noureldin A. (2018). GNSS Error Sources. URL: <https://www.intechopen.com>
- Інтернет-ресурс Natural Resources Canada. Height Reference System Modernization. URL: <https://www.nrcan.gc.ca/>
- Інтернет-ресурс Держгеокадастру. Проект постанови Кабінету Міністрів України “Деякі питання застосування системи висот UELN/EVRS2000 (Об’єднаної європейської нівелірної мережі/Європейської вертикальної референційної системи 2000 року)”. URL: <https://land.gov.ua/>
- Інтернет-ресурс Науково-дослідного інституту геодезії і картографії. Щодо впровадження високоточної Європейської вертикальної референційної системи висот UELN/EVRS2000 на території України. URL: <http://gki.com.ua/>
- Савчук С. Г. (2015). Опрацювання даних ГНСС-спостережень на активних референційних станціях (2013–2014 рр.). *Вісник геодезії та картографії*, № 4 (97). С. 3–10.
- Федорчук А. (2018). Попередній аналіз похибок визначення нормальних висот із GNSS-спостережень на територію міста Львова та його околиць. *Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції молодих вчених “GeoTerrace-2018”*. 13–15 грудня 2018 р., Львів (Україна), С. 33–36.

A. FEDORCHUK

Department of geodesy and astronomy, Lviv Polytechnic National University, 12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine, e-mail alina.v.fedorchuk@lpnu.ua

ANALYSIS OF ELLIPSOIDAL HEIGHTS ERRORS BASED ON GNSS-LEVELING RESULTS

Research the influence of errors on the measurement results is always an urgent task. Analysis of such values makes it possible to assess the nature of the change and the magnitude of the impact of errors for their further consideration or compensation, or minimization. In this paper, the errors in determining ellipsoidal heights from GNSS observations are considered. In determining the ellipsoidal heights, this method can achieve an accuracy of 1–2 cm in static mode (Static) and 2–4 cm in real time mode (RTK). Thus, the accuracy of the chosen mode of observations will indicate the initial limits of the ellipsoidal heights errors influence, and the factors that arise directly during observations and data processing will determine the extent to which these errors will change relative to the initial limits. The **purpose** of this work is to analyze the errors of ellipsoidal heights based on the results of GNSS-leveling obtained in the static and RTK modes. **Method.** The study used GNSS-leveling data at 17 points (wall and soil benchmarks) of leveling lines of I–II classes, which are located within a radius of 15 km from the permanent station SULP of the Lviv Polytechnic National University. Observations were performed in static mode (4-hour) and RTK (8–10 measurements). Points are divided into three categories (5–6 points): 1) statics on wall benchmarks; 2) real-time mode on wall benchmarks; 3) static mode on soil benchmarks. By combining methods and categories, four GNSS networks were formed, including 11, 11, 12 and 17 points. **Results.** For each category, the percentages within which the errors of ellipsoidal heights change in static observation mode and real-time mode using the GNSS leveling method are presented. On the basis of the received information it is established that for the first case errors of ellipsoidal heights on the average change within $\pm 43\%$, for the second $\pm 36\%$, and for the third $\pm 14\%$. The analysis of statistical characteristics for each category shows that the standard deviation of the static mode data is 2 % and 19 %, and the RTK mode – 12 %, respectively. **Scientific novelty and practical significance.** The nature of the change in the error limits of the ellipsoidal heights determination gives an idea of what accuracy should be expected when performing GNSS-leveling depending on the mode of observation.

Such data play an important role in solving scientific and applied problems by GNSS leveling, such as the constructions of new leveling networks or monitoring the height points of existing networks.

Key words: errors; GNSS; leveling; heights; geoid.

References

- Barnes D., Holmes S., Factor J., Ingalls S., Presicci M., and Beale J. (2017). Geophysical Research Abstracts. EGU General Assembly 2017, Vol. 19, EGU2017-9587, 2017. Approved for Public Release, pp. 15–564.
- Celms A., Rusiņš J., Reķe I. (2016). Research of national geodetic network using GNSS metod. *Modern achievements of geodesic sciences and industry*, I (31), pp. 63–68.
- Fanos A., Tahir R., & Mahmood M. (2018). Calculating of adjusted geoid undulation based on EGM08 and mean sea level for different regions in Iraq. *MATEC Web of Conferences*. Vol. 162.
- Fedorchuk A. (2018). Previous analysis of developments determination of normal heights from GNSS-observations on the city of Lviv and followed territories. *Proceedings of International Conference of Young Scientists “GeoTerrace-2018”*. December 13–15, 2018, Lviv (Ukraine), 33–36.
- Gruber T., Gerlach C. & Haagmans R. (2012). Intercontinental height datum connection with GOCE and GPS-levelling data. *Journal of Geodetic Science*. 2 (4), pp. 270–280.
- Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Mainul Hoque M. & Jakowski N. (2008). Estimate of higher order ionospheric errors in GNSS positioning. *Radio Science*, vol. 43, pp. 1–15.
- Karaim M., Elsheikh M. and Noureldin A. (2018). GNSS Error Sources. URL: <https://www.intechopen.com>
- Natural Resources Canada. Height Reference System Modernization. URL: <https://www.nrcan.gc.ca/>
- Naykovo-doslidnyi instytut geodesii i kartografii. Schodo vprovadgenia vysokotochnoi Evropeiskoi vertikalnoi referensnoi systemy vysot UELN/EVRS2000 na terytorii Ukrainy. URL: <http://gki.com.ua/>
- Pavlis N. K., Holmes S. A., & Factor J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008), *J. Geophys. Res.*, 117 p.
- Proekt postanovy Kabinetu Ministriv Ukrainy “Deiaki pytanja zastosuvania sustemy vysot UELN/EVRS2000 (Obiyadnanoi evropeiskoi nivelirnoi meregi/Evropeiskoi vertikalnoi referensnoi systemy 2000 roku)”. URL: <https://land.gov.ua/>
- Savchuk S. (2015). Processing of GNSS observation data at active reference stations (2013-2014 years.). *Bulletin of Geodesy and Cartography*, №4 (97). 3-10.
- Sinem Ince E., Barthelmes F. & Schuh H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. Published by Copernicus Publications – *Earth Syst. Sci. Data*, 11. pp. 647–674.
- Wu Q., Kang J., & Li H. (2015). GNSS Positioning by CORS and EGM2008 in Jilin Province, China. *Sensors – Open Access Journal*. 15, 30419–30428.