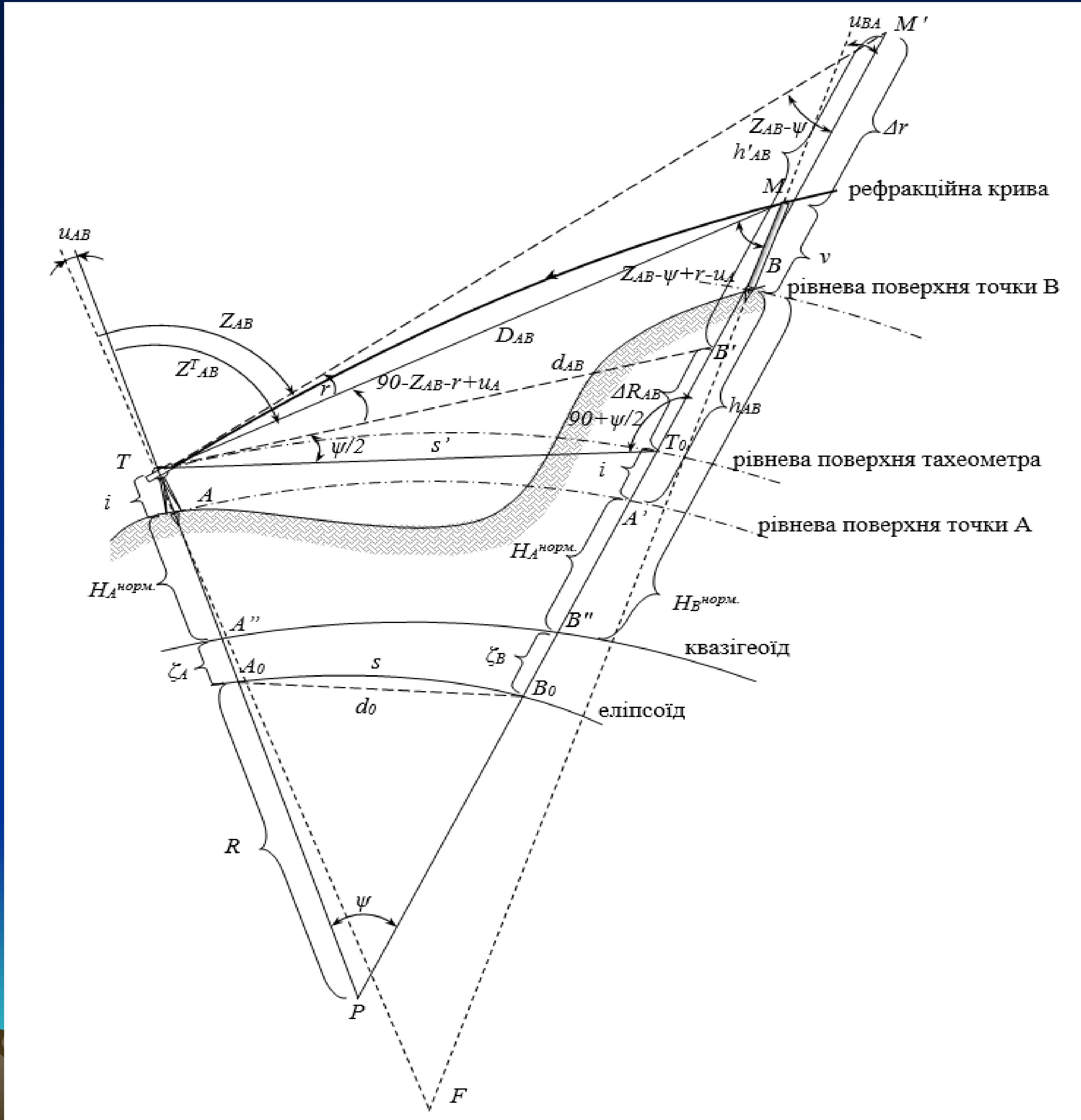
Фис М.М., Перій С.С., Согор М.А.

Визначення найкоротшої відстані та кута між нормалями до еліпсоїда обертання за координатами пунктів GNSS-спостережень



uBA
M '
ZAB-ψ
h'AB
Δr
M
рефракційна крива
uAB
v
B
ZAB-ψ+r-uA
рівнева поверхня точки B
ZAB
DAB
B'
dAB
ZTAB
r
90-ZAB-r+uA
ΔRAB
90+ψ/2
hAB
ψ/2
s'
T0
рівнева поверхня тахеометра
T
i
i
A
A'
рівнева поверхня точки A
HAнорм.
HAнорм.
HBнорм.
A"
B"
квазігеоїд
ζA
A0
s
ζB
B0
d0
еліпсоїд
R
ψ
P
F

Строга формула тригонометричного нівелювання

$$h_{AB} = D_{AB} \frac{\cos\left(Z_{AB} - \frac{\psi}{2} + r - u_{AB}\right)}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)} + i - v$$

- Відомо, що для розв’язування багатьох задач геодезії використовують еліпсоїд обертання, як математичну модель фігури Землі. Причому нормалі, проведені до поверхні цього еліпсоїда в точках з довільними координатами, не будуть перетинатися між собою.
- Ці нормалі можна розглядати як **мимобіжні прямі**.

- Оскільки мимобіжні прямі ніде не перетинаються, то можна знайти:

- найкоротшу відстань між ними (яку позначимо *d*);
- координати точки *P*, яку назвемо уявною точкою перетину цих прямих;
- а також кут між мимобіжними прямими (який позначимо *ψ*).

- Нехай маємо дві прямі s_1 і s_2 , які задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

та

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

- Нехай прямим s_1 та s_2 відповідно належать точки

  $P_1(x_{P1}, y_{P1}, z_{P1})$ та $P_2(x_{P2}, y_{P2}, z_{P2})$.

- Знайдемо відстань d між точками P_1 та P_2 , яка буде найменшою, тобто

$$d = \sqrt{\begin{aligned}&\left(x_{p2} - x_{p1}\right)^2 + \\ &+ \left(y_{p2} - y_{p1}\right)^2 + \\ &+ \left(z_{p2} - z_{p1}\right)^2\end{aligned}} \to \min \qquad (1)$$

- Перейдемо від канонічних рівнянь прямих s_1 та s_2 до параметричних

$$\begin{cases} x_{p1} = x_1 + m_1 \cdot t_1; \\ y_{p1} = y_1 + n_1 \cdot t_1; \\ z_{p1} = z_1 + p_1 \cdot t_1 \end{cases} \qquad (2)$$

та

$$\begin{cases} x_{p2} = x_2 + m_2 \cdot t_2; \\ y_{p2} = y_2 + n_2 \cdot t_2; \\ z_{p2} = z_2 + p_2 \cdot t_2. \end{cases} \qquad (3)$$

- Підставимо рівняння (2) та (3) у рівність (1). Одержимо

$$d=\sqrt{\begin{array}{l}\left(\Delta x+m_2t_2-m_1t_1\right)^2+\\+\left(\Delta y+n_2t_2-n_1t_1\right)^2+\\+\left(\Delta z+p_2t_2-p_1t_1\right)^2\end{array}}\rightarrow\min \qquad (4)$$

- Відстань *d* буде функцією параметрів t_1 та t_2 .

- Необхідною умовою мінімуму функції *d* буде рівність нулеві її часткових похідних, тобто

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial d}{\partial t_1} = -\dfrac{2}{2d}\begin{bmatrix} \left(\Delta x + m_2 t_2 - m_1 t_1\right)\cdot m_1 + \\ + \left(\Delta y + n_2 t_2 - n_1 t_1\right)\cdot n_1 + \\ + \left(\Delta z + p_2 t_2 - p_1 t_1\right)\cdot p_1 \end{bmatrix} = 0; \\[2ex]
\dfrac{\partial d}{\partial t_2} = +\dfrac{2}{2d}\begin{bmatrix} \left(\Delta x + m_2 t_2 - m_1 t_1\right)\cdot m_2 + \\ + \left(\Delta y + n_2 t_2 - n_1 t_1\right)\cdot n_2 + \\ + \left(\Delta z + p_2 t_2 - p_1 t_1\right)\cdot p_2 \end{bmatrix} = 0.
\end{cases}
$$

- Після скорочень одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} +\left(m_1^2+n_1^2+p_1^2\right)\cdot t_1- \\ -\left(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right)\cdot t_2- \\ -\left(m_1\Delta x+n_1\Delta y+p_1\Delta z\right)=0; \\ -\left(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right)\cdot t_1+ \\ +\left(m_2^2+n_2^2+p_2^2\right)\cdot t_2+ \\ +\left(m_2\Delta x+n_2\Delta y+p_2\Delta z\right)=0. \end{cases} \qquad (5)$$

- Якщо позначити коефіцієнти

$$\begin{cases} a = m_1^2 + n_1^2 + p_1^2; \\ b = m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2; \\ c = m_2^2 + n_2^2 + p_2^2; \\ l_1 = m_1 \Delta x + n_1 \Delta y + p_1 \Delta z; \\ l_2 = m_2 \Delta x + n_2 \Delta y + p_2 \Delta z, \end{cases} \qquad (6)$$

- Тоді система лінійних рівнянь (5) прийме вигляд

$$\begin{cases} +a \cdot t_1 - b \cdot t_2 - l_1 = 0; \\ -b \cdot t_1 + c \cdot t_2 + l_2 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

- Розв’яжемо систему рівнянь (7), наприклад, методом Крамера.
- Тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ -b & c \end{vmatrix} = a \cdot c - b^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} l_1 & -b \\ -l_2 & c \end{vmatrix} = c \cdot l_1 - b \cdot l_2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & l_1 \\ -b & -l_2 \end{vmatrix} = -a \cdot l_2 + b \cdot l_1 .$$

- Звідки

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}; \\ t_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases} \qquad (8)$$

- Тоді значення параметрів t_1 і t_2 підставимо у рівняння (2) та (3) відповідно і одержимо координати точок $P_1(x_{P1}, y_{P1}, z_{P1})$ та $P_2(x_{P2}, y_{P2}, z_{P2})$ на прямих s_1 та s_2 .

- Відстань *d* між знайденими точками буде мінімальною. Вона і буде найкоротшою відстанню між мимобіжними прямими, яка обчислюється за формулою (1).

- Тоді уявна точка *P* перетину мимобіжних прямих s_1 та s_2 буде мати координати

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{x_{p1} + x_{p2}}{2}; \\ y_p = \dfrac{y_{p1} + y_{p2}}{2}; \\ z_p = \dfrac{z_{p1} + z_{p2}}{2}. \end{cases} \qquad (9)$$

- Кут ψ між мимобіжними прямими знайдемо із формули скалярного добутку двох векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$

$$\cos\psi = \frac{\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right)}{\left|\vec{s}_1\right| \cdot \left|\vec{s}_2\right|} \qquad (10)$$

- У формулі (10)

$$\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 \qquad (11)$$

– скалярний добуток векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$;

$$\left|\vec{s}_1\right| = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \qquad (12)$$

$$\left|\vec{s}_2\right| = \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2} \qquad (13)$$

– довжини векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ відповідно.

- Підставивши рівності (11) – (13) у формулу (10), остаточно одержимо

$$\cos\psi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (14)$$

- Результати обчислень найкоротшої відстані та кута між нормалями до еліпсоїда обертання WGS-84 за координатами пунктів GNSS-спостережень наведемо у таблиці 1.

Пункти GNSS-спостережень		Координати уявної точки перетину нормалей (м)			Відстань (м)	Кут (")
		X_p	Y_p	Z_p	d	ψ
STVR	OGZ-2-1A	1463.1245	760.8979	-30179.7600	1.0014	32.372
GZ-10	GZ-11A	5335.3108	2774.4857	-25245.0340	0.0833	1.825
GZ-10	GZ-11B	5340.2482	2777.0377	-25238.7710	0.1232	2.698
GZ-10	GZ-12	5309.9583	2761.2544	-25277.4380	0.2047	4.486
GZ-11A	GZ-11B	5408.9056	2812.7079	-25151.3250	0.0398	0.873
GZ-11A	GZ-12	5301.3790	2756.7606	-25288.4360	0.1214	2.661
GZ-11B	GZ-12	5279.6284	2745.4347	-25316.1880	0.0815	1.787